

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA

UNIDAD DE CIENCIAS BÁSICAS

CÁLCULO INTEGRAL - MATEMÁTICA II

CICLO II – 2025

Unidad III: Aplicaciones de la integral.

Sólidos de revolución: discos y arandelas

Aprendizajes esperados: al finalizar con éxito esta unidad los estudiantes serán capaces de aplicar la integral definida para resolver problemas relacionados con el cálculo del volumen de un sólido de revolución.

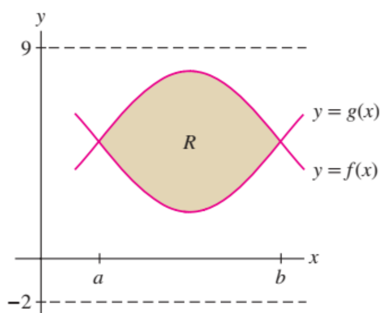
[1-4] (a) Dibuja el sólido obtenido al girar la región bajo la gráfica de $f(x)$ alrededor del eje x en el intervalo dado, (b) describe la sección transversal perpendicular al eje x, y (c) calcula el volumen del sólido.

1. $f(x) = x + 1, [0,3]$
2. $f(x) = x^2, [1,3]$
3. $f(x) = \sqrt{x+1}, [1,4]$
4. $f(x) = x^{-1}, [1,4]$

[5-9] Calcula el volumen del sólido de revolución obtenido al girar la región bajo la gráfica de $f(x)$ alrededor del eje x en el intervalo dado.

5. $f(x) = x^2 - 3x, [0,3]$
6. $f(x) = x^{-2}, [1,4]$
7. $f(x) = x^{5/3}, [1,8]$
8. $f(x) = 4 - x^2, [0,2]$
9. $f(x) = \csc x, \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

[10-11] Si R es la región sombreada de la siguiente figura



10. ¿Cuál de los integrandos (i) – (iv) debe usarse para calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar R alrededor de $y = -2$?
    a. $(f(x)^2 + 2^2) - (g(x)^2 + 2^2)$
    b. $(f(x) + 2)^2 - (g(x) + 2)^2$
    c. $(f(x)^2 - 2^2) - (g(x)^2 - 2^2)$
    d. $(f(x) - 2)^2 - (g(x) - 2)^2$
11. ¿Cuál de los integrandos (i) – (iv) debe usarse para calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar R alrededor de $y = 9$?
    a. $\left(9 - f(x)\right)^2 - \left(9 - g(x)\right)^2$
    b. $\left(9 + f(x)\right)^2 - \left(9 + g(x)\right)^2$
    c. $\left(9 - g(x)\right)^2 - \left(9 - f(x)\right)^2$
    d. $\left(9 + g(x)\right)^2 - \left(9 + f(x)\right)^2$

[12-17] (a) Dibuje la región encerrada por las curvas. (b) describa la sección transversal perpendicular al eje x. (c) Calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la región alrededor del eje x.

12. $y = x^2 + 2; y = 10 - x^2$
13. $y = x^2; y = 2x + 3$
14. $y = 16 - x; y = 3x + 12; x = -1$
15. $y = \frac{1}{x}; y = \frac{5}{2} - x$
16. $y = \sec x\,; y = 0; x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}$
17. $y = \sec x\,; y = 0; x = 0, x = \frac{\pi}{4}$

[18-19] Calcule el volumen del sólido que se genera al girar la región encerrada por las gráficas alrededor del eje y en el intervalo indicado.

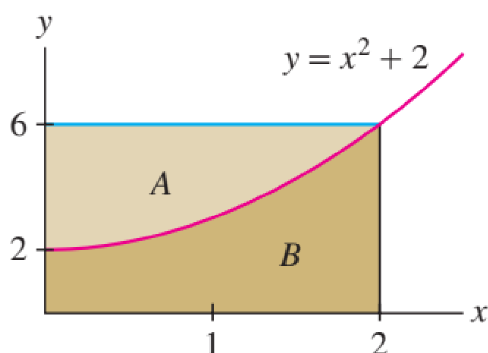
18. $x = \sqrt{y}; x = 0;\ \ 1 \leq y \leq 4$
19. $x = \sqrt{\sin y}\,; x = 0;\ \ 0 \leq y \leq \pi$

[20-21] Calcule el volumen del sólido que se genera al girar la región encerrada por las gráficas alrededor del eje y.

20. $x = y^2; x = \sqrt{y}$
21. $x = 4 - y; x = 16 - y^2$
22. Sea R la región encerrada por $y = x^2 + 2; y = (x-2)^2; x = 0$ y $y = 0$. Calcule el volumen V que se obtiene al girar R alrededor del eje x.

[23-28] Calcule el volumen del sólido que se genera al girar la región A alrededor del eje indicado.

23. eje x
24. $y = -2$
25. $y = 2$
26. eje y
27. $x = -3$
28. $x = 2$



[29-32] Calcule el volumen del sólido que se genera al girar la región B alrededor del eje indicado.

29. Eje x
30. $y = -2$
31. $y = 6$
32. Eje y
33. $x = 2$
34. $x = -3$

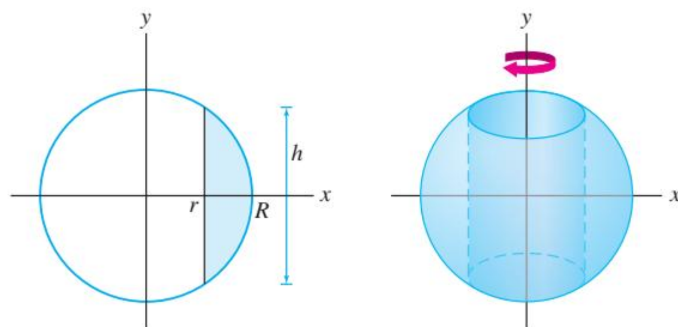
[35-41] Escriba la integral que representa el volumen del sólido que se forma al girar la región encerrada por las gráficas alrededor del eje indicado. Use un CAS para verificar su respuesta.

35. $y = x^2; y = 12 - x; x = 0$ alrededor de $y = -2$
36. $y = 16 - 2x; y = 6; x = 0$ alrededor del eje x
37. $y = \sec x\,; y = 1 + \frac{3}{\pi}x$ alrededor del eje x
38. $y = 2\sqrt{x}; y = x$ alrededor de $x = -2$
39. $y = x^3; y = x^{\frac{1}{3}}$ para $x \geq 0$ alrededor del eje y
40. $y = \frac{9}{x^2}; y = 10 - x^2, x \geq 0$ alrededor de $y = 12$
41. $y = \frac{1}{x}; y = \frac{5}{2} - x$ alrededor del eje y.

Respuestas (35-41):
$1872\pi/5\,, 1400\pi/3, 7\pi^2/9 - \sqrt{3}\pi, 96\pi/5\,, 16\pi/35,\ 1184\pi/15, 9\pi/8$

42. Una «cuenta» se forma al quitar un cilindro de radio r del centro de una esfera de radio R. Calcula el volumen de la cuenta con $r = 1$ y $R = 2$.

Respuesta: $4\pi\sqrt{3}$



Nota: puede mostrarse también que el volumen de la cuenta se puede calcular por $V = \frac{\pi}{6}h^3$ donde h es la altura de la cuenta. Esta fórmula tiene una consecuencia sorprendente: como V puede expresarse únicamente en términos de h, se deduce que dos cuentas de 1 cm de altura, una formada a partir de una esfera del tamaño de una naranja y la otra a partir de una esfera del tamaño de la Tierra, tendrían el mismo volumen. ¿Puedes explicar intuitivamente cómo es posible esto?